

最速降下曲線の検証

1、はじめに

◎最速降下曲線とは

2点間を結ぶ全ての曲線のうち、物体に初速度を与えずに降下させた際の所要時間が最も短い曲線である。これは理論上、サイクロイドであるといわれている。(図1)

◎サイクロイドとは

円が直線上を滑ることなく転がった際にできる円周上のある一点が描く曲線である。(図2)

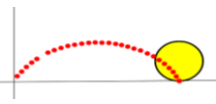
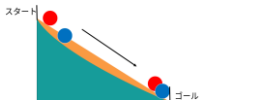


図1.最速降下曲線のイメージ図

図2.サイクロイド

2、目的

サイクロイドが実際に最速降下曲線であることを検証する。

3、実験方法

②同じ金属球を使用して始点から終点まで転がし、その様子をiPhoneで撮影する。

③動画を見て所要時間を計測する。

④以上の動作をそれぞれ100回ずつ行い、数値の分布を調べる。

※本実験では球が坂を転がる所要時間の平均値が最も短かったものを最速降下曲線とする。

4、実験A

〈4種類の坂での検証〉

◎実験器具(図3,4)

・坂(発泡スチロール、プラスチックレール)

・金属球(ステンレス鋼)

・iPhone(4K 60fps)

◎坂の形状の式・グラフ(図5)

直線 $y=2x/3$

サイクロイド $(\theta - \sin \theta, 1 - \cos \theta)$

楕円 $(x-3)^2/3^2 + y^2/2^2 = 1$

円 $x^2 + y^2 - 6x + 5x/2 = 0$

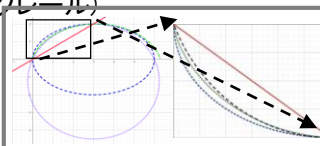


図5.使用した曲線のグラフ

図6.図5の拡大図

◎結果

表1.各坂ごとの所要時間(有効数字2桁)

単位(s)	直線	サイクロイド	楕円	円
平均値	0.45	0.37	0.37	0.41
最大値	0.50	0.42	0.42	0.49
最小値	0.41	0.32	0.31	0.35
中央値	0.44	0.37	0.38	0.40

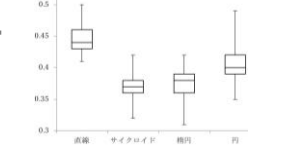


図7.各坂の所要時間

◎考察

・直線以外の曲線で数値のばらつきが大きくなった。

→レールの側面にできた歪みが原因だと考えられる(図7,8)。

・直線、円とサイクロイド、楕円で比べると、大きな差が生まれた(表1)。

→後者のほうが前者に比べて始点付近の傾きが大きいことが原因だと考えられる(図6)。

・平均値において、サイクロイドと楕円に差は見られなかった(表1)。

⇒坂の坂面、レールの改良が必要

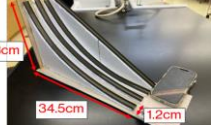


図3,4.実験器具の写真

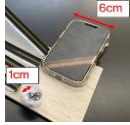


図8.レールの歪みの写真

5、実験B

〈実験Aを踏まえた2種類の坂での検証〉

◎実験器具(図4,)

・坂

・金属球(実験Aと同様)

・iPhone(4K 240fps)

◎坂の形状の式・グラフ(図9)

サイクロイド $(\theta - \sin \theta, 1 - \cos \theta)$

楕円 $(x - \pi)^2 / \pi^2 + y^2 / 2^2 = 1$

◎結果

表2.各坂の所要時間(有効数字4桁)

単位(s)	サイクロイド	楕円
平均値	0.5484	0.5576
最大値	0.5933	0.6083
最小値	0.5083	0.5117
中央値	0.5483	0.5567

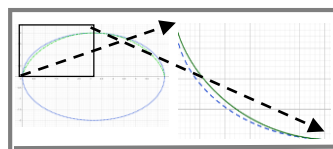


図9.使用した曲線のグラフ

図10.図9の拡大図

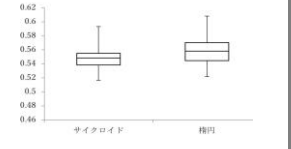


図11.各坂の所要時間

◎考察

始点付近の傾きが楕円の方が大きいにも関わらず、サイクロイドの方が全ての値が小さくなった。

→始点付近の傾きだけでなく、レールの長さも関係があると考えられる。

・実験A、Bのそれぞれの標準偏差を比べると実験Bの方が値が小さくなっている。

→坂の改良により、数値のばらつきが軽減されたと考えら

れ

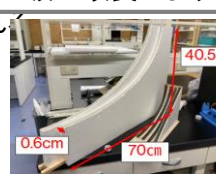


図12.実験器具の写真

表3.実験A、Bの標準偏差

	サイクロイド	楕円
実験A	0.0226	0.0334
実験B	0.0164	0.0185

6、結論

・サイクロイドの最速降下曲線という特性を実験によって確かめることができた。

・最速降下曲線の特性には始点付近の傾きだけではなく、レール自体の長さも関係していると考えられる。

7、課題

・理論値を計算して実験結果と比較し、数値の差を調べる。

・比較する坂の種類を増やす。

・レール自体の長さにも着目して比較を行う。

8.参考文献

1) 北海道大学グループA 新井洋輔 宮本郁己 森佳祐 鈴鹿正顕 「最速降下問題」(閲覧日 令和6年5月27日)
https://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~furuhashi/ed/FreshmanSeminar/060721_a.pdf

2) 数学C 数研出版 岡部恒治 p.151

3) 琉球大学理学部数理科学科 佃修一 「最速降下線(Brachistochrone)」(閲覧日 令和6年5月27日)
<http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~tsukuda/lecturenotes/kaihoussh.pdf>

4) 新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治 「最速降下線について」(閲覧日 令和7年5月14日)
<http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/misc/data/cycloid1.pdf>