

最速降下曲線の検証

茨城県立茨城県立水戸第二高等学校 2年 阿部楓華 新妻つばき

1. はじめに

◎最速降下曲線とは

2点間を結ぶ全ての曲線の内、物体が初速度0で位置エネルギーが高い方の点(高所)を出発してから、もう一方の点に達するまでの所要時間が最も短い曲線(図1)。

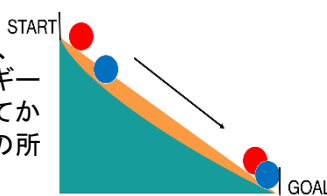


図1. 最速降下曲線のイメージ図

最速降下曲線=サイクロイド

◎サイクロイドとは

円が直線上を滑ることなく転がった際にできる円周上のある一点が描く曲線の軌道(図2)。

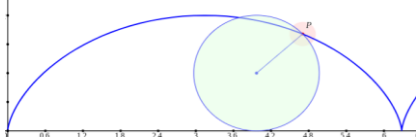


図2. サイクロイドとは？

2. 目的

サイクロイドが実際に最速降下曲線であることを検証する。

4. 実験器具

・坂(直線、サイクロイド、楕円、円の4種類)
発泡スチロール、プラスチック製レール
縦23cm×横34.5cm×幅2cm

・金属球
ステンレス鋼
直径1cm、質量4.15g

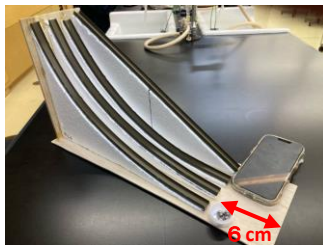


図3. 実際に使用した実験器具

5. 坂に使用した曲線の式

・直線 $y=2x/3$

・サイクロイド

$(\theta - \sin\theta, 1 - \cos\theta)$

・楕円 $(x-3)^2/3^2 + y^2/2^2 = 1$

・円 $x^2 + y^2 - 6x + 5y/2 = 0$

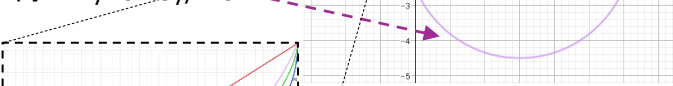


図4. 坂に使用した曲線のグラフ

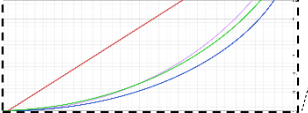


図5. 図4のグラフの使用した部分の拡大図

3. 準備方法

- ① 始点と終点の同じ直線、楕円、円、サイクロイドの坂を準備する。
- ② 同じ金属球を使用して、金属球を始点から終点まで転がす様子を撮影する。(iPhoneを使用)
- ③ 動画を見てかかった時間を計測する。
- ④ ②、③の動作を各種類100回ずつ行い、数値の分布を調べる。

※ 本実験では坂を転がる所要時間の平均値が最も短かったものを最速降下曲線とする。

6. 実験結果

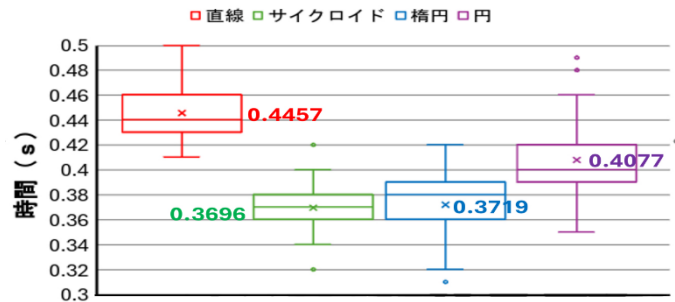


図6. 各坂の所要時間

表1. 各坂ごとの所要時間 (平均値の有効数字4桁)

単位 (s)	直線	サイクロイド	楕円	円
平均値	0.4457	0.3696	0.3719	0.4077
最大値	0.50	0.42	0.42	0.49
最小値	0.41	0.32	0.31	0.35
中央値	0.44	0.37	0.38	0.40

7. 考察

- ① 計測を行ったところ所要時間が短い順にサイクロイド、楕円、円、直線となった(図6、図7)。また、サイクロイドと楕円の平均値の差は0.012と微差であった。この二つの曲線は始点付近の角度が急であったため、重力によって加速されたと考える。
- ② 直線以外の坂では最大値・最小値の間で0.1s以上の誤差が生まれた。これはレールの側面に歪みが生じており、金属球が歪んだ場所に引っかかりボールの運動が妨害されたと考えた。

8. 結論

本実験ではサイクロイドが最速降下曲線であった。しかし、実験結果が正確性に欠ける為、明確ではない。

9. 参考文献

- 1)北海道大学 グループ A 新井洋輔 宮本郁己 森佳祐 鈴鹿正顕「最速降下問題」
<https://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~furuhashi/ed/FreshmanSeminar/060721a.pdf>
- 2)琉球大学理学部数理科学科 佃修一「最速降下線(Brachistocron)」
<http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~tsukuda/lecturenotes/kaihoussh.pdf>
- 3)数学Ⅲ 数研出版